2021 年普通高等学校招生全国统一考试适应模拟
数学参考答案

一、单项选择题：

1——4．BDCD．　　5——8．ADBD

2．【解析】记事件 A:电视机的显像管开关了10000次还能继续使用，记事件 B:电视机的显像管开关了15000次后还能继续使用，则 $P\left(AB\right)=0.6$，$P\left(A\right)=0.8$，所以，已经开关了10000次的电视机显像管还能继续使用到15000次的概率为 $P\left(B\left|A\right.\right)=\dfrac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}=\dfrac{0.6}{0.8}=0.75$.故选：D.

3．【解析】当 $a=1$ 时，直线 l_1：$x+2y-1=0$ 与直线 l_2：$x+2y+4=0$ 显然平行；若直线 l_1 与直线 l_2 平行，则有：$\dfrac{a}{1}=\dfrac{2}{a+1}\neq-2$，解之得：$a=1$ ．所以是充分必要条件.

4．【提示】面积法转化．7．【提示】图像法转化.

8.【解析】由图易得点 C 的横坐标为 $\dfrac{\pi}{3}$，所以 $f(x)$ 的周期 $T=\pi$，所以 $\omega=2$，又 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，因此 $f(x)=A\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$．函数 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 成中心对称．若圆半径为 $\dfrac{5\pi}{12}$，则 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}A=\sqrt{\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)^2-\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2}$，$\therefore A=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$，函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，故选 D．

二、多项选择题：

9．AC．　10．BCD．　11．AC．　12．ABCD

9.【答案】AC．【解析】∵K^2 的观测值为 9，且 P（K^2≥6.635）=0.010，P（K^2≥10.828）=0.001，

又∵9＞6.635，但 9＜10.828，∴有 99%的把握认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关，

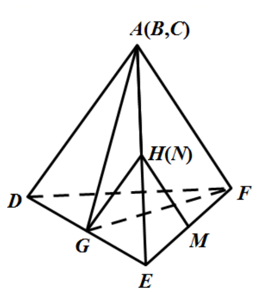
或者说，在犯错误的概率不超过 0.010 的前提下，认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关，

所以选项 C 正确，选项 D 错误，由表可知认可“光盘行动”的人数为 60 人，

所以在该餐厅用餐的客人中认可“光盘行动”的比例为 $\dfrac{60}{90}\times100\%\approx66.7\%$，

故选项 A 正确，选项 B 错误，故选：AC.

10.【答案】BCD．【解析】如图,把平面展开图还原成正四面体,知 GH 与 EF 为异面直线,A 不正确；BD 与 MN 为异面直线，B 正确；$GH//AD$，$MN//AF$，而 $\angle DAF=60^\circ$，$\therefore\angle GHM=60^\circ$，



$\therefore GH$ 与 MN 成 60° 角，C 正确；连接 AG,FG，$AG\perp DE$，$FG\perp DE$

$\therefore DE\perp$ 平面 AFG，$\therefore DE\perp AF$，又 $MN//AF$　$\therefore DE$ 与 MN 垂直,D 正确.故选：BCD

11.【答案】AC．【解析】将方程 $2(x-1)(x-3)=y(e^{x-2}+e^{2-x})$ 整理可得 $y=\dfrac{2(x-1)(x-3)}{e^{x-2}+e^{2-x}}$，令 $y=f(x)$

将 x 换成 $4-x$ 时，即 $f(4-x)=\dfrac{2[(4-x)-1][(4-x)-3]}{e^{(4-x)-2}+e^{2-(4-x)}}=\dfrac{2(x-3)(x-1)}{e^{2-x}+e^{x-2}}$，

所以 $f(x)=f(4-x)$，所以曲线关于 $x=2$ 对称，所以①正确，②不正确；

当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，所以该曲线不经过第三象限，故③正确，

曲线过的整点为 $(1,0)$，（3，0），（2，-1）三个整数点，故④不正确，故选：AC.

12.【答案】 ABCD【提示】集合元素设为复数的代数形式或者利用复数模的几何意义数形结合.

三、填空题：

13.$3\sqrt{2}$；　14.155；　15.己卯 ；60；　16.$\dfrac{\sqrt{2}(1+\ln2)}{2}$

13.【答案】$3\sqrt{2}$.

【解析】$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{10}\Leftrightarrow(2\vec{a}-\vec{b})^2=10\Leftrightarrow4+\left|\vec{b}\right|^2-4\left|\vec{b}\right|\cos45^\circ=10\Leftrightarrow\left|\vec{b}\right|=3\sqrt{2}$

14.【答案】155.　【提示】取对数解.

15.【答案】己卯 ；60.

【解析】解：根据题意，天干有十，即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸，

地支有十二，即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥；

其相配顺序为：甲子、乙丑、丙寅、…、癸酉，甲戌、乙亥、丙子、…、癸未，甲申、乙酉、丙戌、…、癸巳，…，若 2049 年是己巳年，则 2059 年是己卯年；天干是以 10 为公差的等差数列，地支是以 12 为公差的等差数列，则天干地支共有 60 种组合，即使用干支纪年法可以得到 60 种不同的干支纪年；

故答案为：己卯，60.

16.【答案】$\dfrac{\sqrt{2}(1+\ln2)}{2}$【提示】数形结合，对称性.

四、解答题：

17.【解析】

（Ⅰ）$f\left(x\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$；单调递增区间：$\left[k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right],(k\in Z)$;

（Ⅱ）由余弦定理及重要不等式，得 $A=\dfrac{\pi}{3},bc\leq4,(S_{\triangle ABC})_{\max}=\sqrt{3}.$

18.【解析】

（Ⅰ）设 $x=(t-1)^2$，则 $\bar{x}=6$， $\bar{y}=\dfrac{1+11+27+51+80}{5}=34$，

则 $\hat{b}=\dfrac{0+11+4\times27+9\times51+16\times80-5\times6\times34}{1^4+2^4+3^4+4^4-5\times6^2}=\dfrac{419}{87}=4.82$，

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=5.08$，故 y 关于 t 的回归方程为 $\hat{y}=4.82(t-1)^2+5.08$.

（Ⅱ）由（1）知，当 $t=6$ 时， $\hat{y}=4.82\times5^2+5.08=125.58$，

因为 $\left|\dfrac{\varepsilon_0}{y_0}\right|=\dfrac{|120-125.58|}{120}<\dfrac{6}{120}=0.05$，所以（1）中求得的回归方程可靠.

19.【解析】

（Ⅰ）因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $BD\perp AC$，又 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PC\perp BD$. ……2 分

设 $AC\cap BD=F$，连结 EF. 因为 $AC=2\sqrt{2}$，$PA=2$，$PE=2EC$，故

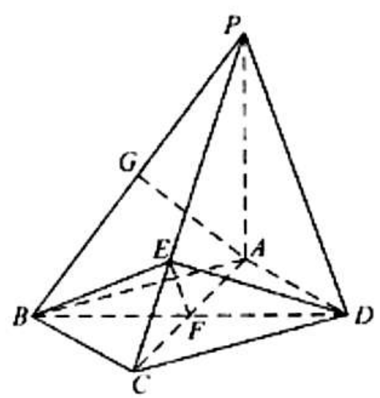
$PC=2\sqrt{3}$，$EC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$FC=\sqrt{2}$，

从而 $\dfrac{PC}{FC}=\sqrt{6}$，$\dfrac{AC}{EC}=\sqrt{6}$.

因为 $\dfrac{PC}{FC}=\dfrac{AC}{EC}$，$\angle FCE=\angle PCA$，所以

$\triangle FCE\backsim\triangle PCA$，$\angle FEC=\angle PAC=90°$，

由此知 $PC\perp EF$.



PC 与平面 BED 内两条相交直线 BD，EF 都垂直，所以 $PC\perp$ 平面 BED. ……6 分

（Ⅱ）在平面 PAB 内过点 A 作 $AG\perp PB$，G 为垂足.

因为二面角 $A-PB-C$ 为 $90°$，所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC.

又平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，故 $AG\perp$ 平面 PBC，$AG\perp BC$.

BC 与平面 PAB 内两条相交直线 PA，AG 都垂直，故 $BC\perp$ 平面 PAB，于是 $BC\perp AB$，所以底面 $ABCD$ 为正方形，$AD=2$，$PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=2\sqrt{2}$. ……8 分

设 D 到平面 PBC 的距离为 d.

因为 $AD /\!/ BC$，且 $AD\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，故 $AD /\!/$ 平面 PBC，A、D 两点到平面 PBC 的距离相等，即 $d=AG=\sqrt{2}$.

设 PD 与平面 PBC 所成的角为 α，则 $\sin\alpha=\dfrac{d}{PD}=\dfrac{1}{2}$.

所以 PD 与平面 PBC 所成的角为 $30°$. ……12 分

解法 2：设 $AC\cap BD=O$，以 O 为原点，OC 为 x 轴，OD 为 y 轴建立空间直角坐标系，则 $A(-\sqrt{2},0,0),C(\sqrt{2},0,0),P(-\sqrt{2},0,2)$，设 $B(0,-a,0),D(0,a,0),E(x,y,z)$.

（Ⅰ）证明：由 $PE=2EC$ 得 $E(\dfrac{\sqrt{2}}{3},0,\dfrac{2}{3})$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(2\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{BE}=(\dfrac{\sqrt{2}}{3},a,\dfrac{2}{3})$，$\overrightarrow{BD}=(0,2a,0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BE}=(2\sqrt{2},0,-2)\cdot(\dfrac{\sqrt{2}}{3},a,\dfrac{2}{3})=0$，

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BD}=(2\sqrt{2},0,-2)\cdot(0,2a,0)=0$. 所以 $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{BD}$，所以 $PC\perp$ 平面 BED；

（Ⅱ）设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，又 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2),\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},-a,0)$，由 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 得 $\vec{n}=(1,\dfrac{\sqrt{2}}{a},0)$，设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，又 $\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2},a,0),\overrightarrow{CP}=(-2\sqrt{2},0,2)$，由 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0$，得 $\vec{m}=(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{a},\sqrt{2})$，由于二面角 $A-PB-C$ 为 $90°$，所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，解得 $a=\sqrt{2}$.

所以 $\overrightarrow{PD}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-2)$，平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(1,-1,\sqrt{2})$，所以 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{|\overrightarrow{PD}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{1}{2}$，所以 PD 与平面 PBC 所成角为 $\dfrac{\pi}{6}$.

【点评】试题变化的地方就是点 E 的位置的选择是三等分点，这样的垂直问题对于同学们来说是有点难度的，因此最好使用空间直角坐标系解决该问题为好.

20.【解析】

（Ⅰ）**若选①**：设 $P(x,y)$，根据题意，得 $\dfrac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

整理，得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 所以动点 P 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

若选②：设 $P(x,y)$，$S(x',0)$，$T(0,y')$，则 $\sqrt{(x')^2+(y')^2}=3(*)$.

因为 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OS}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OT}$，所以 $\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}x',\\ y=\dfrac{1}{3}y'.\end{cases}$ 整理，得 $\begin{cases}x'=\dfrac{3}{2}x,\\ y'=3y,\end{cases}$

代入$(*)$得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. 所以动点 P 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

若选③：设 $P(x,y)$，直线 l 与圆相切于点 H，则 $|PA|+|PB|=d_1+d_2=2|OH|=4>2\sqrt{3}=|AB|$.

由椭圆的定义，知点 P 的轨迹是以 A，B 为焦点的椭圆.

所以 $2a=4$，$2c=|AB|=2\sqrt{3}$，故 $a=2$，$c=\sqrt{3}$，$b=1$.

所以动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）**法一**　设 $Q(0,y_0)$，当直线 l' 的斜率不存在时，$y_0=0$.

当直线 l' 的斜率存在时，若斜率为 0，则线段 MN 的垂直平分线与 y 轴重合，不合题意，所以设直线 l' 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

联立得方程组 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-1)=0$，

则 $\Delta>0$ 恒成立，且 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{1+4k^2}$.设线段 MN 的中点为 $G(x_3,y_3)$，

则 $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{1+4k^2}$，$y_3=k(x_3-1)=-\frac{k}{1+4k^2}$.

所以线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y+\frac{k}{1+4k^2}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{4k^2}{1+4k^2}\right)$，

令 $x=0$，得 $y_0=\frac{3k}{1+4k^2}=\frac{3}{\frac{1}{k}+4k}$.

当 $k<0$ 时，$\frac{1}{k}+4k\leqslant -4$，当且仅当 $k=-\frac{1}{2}$ 时取等号，所以 $-\frac{3}{4}\leqslant y_0<0$；

当 $k>0$ 时，$\frac{1}{k}+4k\geqslant 4$，当且仅当 $k=\frac{1}{2}$ 时取等号，所以 $0<y_0\leqslant\frac{3}{4}$.

综上所述，点 Q 纵坐标的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$.

法二　设 $Q(0,y_0)$，由题意，得直线 l' 的斜率不为 0，设直线 l' 的方程为 $x=my+1$.若 $m=0$，则 $y_0=0$. 当 $m\neq 0$ 时，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立得方程组 $\begin{cases} x=my+1, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases}$ 消去 x 并整理，得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

则 $\Delta>0$ 恒成立，且 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}$.设线段 MN 的中点为 $G(x_3,y_3)$，则

$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{m}{m^2+4}$，$x_3=my_3+1=\frac{4}{m^2+4}$.所以线段 MN 的垂直平分线的方程为

$y+\frac{m}{m^2+4}=-m\left(x-\frac{4}{m^2+4}\right)$.令 $x=0$，得 $y_0=\frac{3m}{m^2+4}=\frac{3}{m+\frac{4}{m}}$.

当 $m<0$ 时，$m+\frac{4}{m}\leqslant -4$，当且仅当 $m=-2$ 时取等号，所以 $-\frac{3}{4}\leqslant y_0<0$；

当 $m>0$ 时，$m+\frac{4}{m}\geqslant 4$，当且仅当 $m=2$ 时取等号，所以 $0<y_0\leqslant\frac{3}{4}$.

综上所述，点 Q 纵坐标的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$.

法三　设 $Q(0,y_0)$，当直线 l' 的斜率不存在时，$y_0=0$.

当直线 l' 的斜率存在时，设直线 l' 的斜率为 k，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，线段 MN 的中点为 $G(x_3,y_3)$.由

$\begin{cases} \frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1, \\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1, \end{cases}$ 得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$.

所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{4(y_1+y_2)}=-\frac{2x_3}{4\cdot 2y_3}=-\frac{x_3}{4y_3}$.

线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y-y_3=\frac{4y_3}{x_3}(x-x_3)$，

令 $x=0$，得 $y_0=-3y_3$.由 $k=-\frac{x_3}{4y_3}=\frac{y_3}{x_3-1}$，得 $y_3^2=-\frac{1}{4}x_3^2+\frac{1}{4}x_3=-\frac{1}{4}\left(x_3-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{16}$，

由 $y_3^2>0$ 得 $0<x_3<1$，所以 $0<y_3^2\leqslant\frac{1}{16}$，则 $-\frac{1}{4}\leqslant y_3<0$ 或 $0<y_3\leqslant\frac{1}{4}$，所以 $-\frac{3}{4}\leqslant y_0<0$ 或 $0<y_0\leqslant\frac{3}{4}$.

综上所述，点 Q 纵坐标的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$.

21.【解析】

（Ⅰ）$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(x+2)$，

令 $f'(x)>0$，解得：$x>0$ 或 $x<-2$，令 $f'(x)<0$，解得：$-2<x<0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 递增，在 $(-2,0)$ 递减，在 $(0,+\infty)$ 递增，

故 $x=-2$ 时，$f(x)$ 取极大值，$f(x)$ 的极大值是 $f(-2)=\frac{4-e^2}{e^2}<0$，

而 $f(0)=-1<0$，$f(1)=e-1>0$，故 $f(x)$ 只有 1 个零点；

（Ⅱ）由 $2\ln x+x=\ln x^2+\ln e^x=\ln(x^2e^x)$，故原不等式等价于 $x^2e^x-1\geqslant a\ln(x^2e^x)$，

令 $t=x^2e^x$，则 $t-1\geqslant a\ln t$，由（1）知：$x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即 $x^2e^x-1>-1$，

故 $x^2e^x>0$，即 $t\in(0,+\infty)$，$\therefore t-1\geqslant a\ln t$.即 $t-a\ln t-1\geqslant 0$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

令 $g(t)=t-a\ln t-1$，则 $g'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}$，且 $g(1)=1-a\ln 1-1=0$，

①若 $a\leqslant 0$，则 $g'(t)>0$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 时恒成立，$g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore t\in(0,1)$ 时，$g(t)<g(1)=0$，不满足 $g(t)\geqslant 0$ 恒成立，

②若 $a>0$，令 $g'(t)=0$，解得：$t=a$，

∴$t\in(0,a)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 递减，$t\in(a,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 递增，

（i）若 $0<a<1$，则 $g(t)$ 在 $(a,1)$ 上单调递增，

$t\in(a,1)$ 时，$g(t)<g(1)=0$，不满足 $g(t)\geqslant 0$ 恒成立，

（ii）若 $a=1$，则 $g(t)_{min}=g(1)=0$，$g(t)\geqslant 0$，

（iii）若 $a>0$，则 $g(t)$ 在 $(1,a)$ 上单调递减，

$t\in(1,a)$ 时，$g(t)<g(1)=0$，不满足 $g(t)\geqslant 0$ 恒成立，

综上：$a=1$ 时，符合题意，故 a 的取值范围是 $\{1\}$.

（注：其它方法酌情给分）

22.【解析】

（Ⅰ）由于 $S_n=\dfrac{(a_n+1)^2}{4},n\in N^*$，故 $S_1=\dfrac{(a_1+1)^2}{4}\Rightarrow a_1=1$；$n\geq 2$ 时 $4S_n=(a_n+1)^2,4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$；

作差得，$4a_n=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2\Leftrightarrow(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$.

由于 $\{a_n\}$ 是正项数列，故 $a_n-a_{n-1}=2$，$\{a_n\}$ 是等差数列，$a_n=2n-1,S_n=n^2$.

（Ⅱ）由于 $b_n-S_n=b_n-n^2,b_{n+1}-S_{n+1}=b_{n+1}-(n+1)^2$，$b_n+b_{n+1}=2n^2+2n+1=n^2+(n+1)^2$，

故 $b_{n+1}-S_{n+1}=-(b_n-S_n)$.由于 $b_1-S_1=b_1-1$，所以

（1）当 $b_1\neq 1$ 时，$\dfrac{b_{n+1}-S_{n+1}}{b_n-S_n}=-1$，数列 $\{b_n-S_n\}$ 构成等比数列；

（2）当 $b_1=1$ 时，数列 $\{b_n-S_n\}$ 不构成等比数列.

（Ⅲ）若 $b_1=1$，由（Ⅱ）知 $b_k=k^2$．于是，所求不等式即 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\dfrac{k^2+1}{k^4+k^2+1}\right|\leq\dfrac{55}{111}\leq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{k^4+k^2+1}$.

设 $f(k)=\dfrac{1}{k^2-k+1}$，则 $f(k+1)=\dfrac{1}{k^2+k+1}$.

故 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{k^4+k^2+1}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2k}{(k^2+1)^2-k^2}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(f(k)-f(k+1)\right)=\dfrac{1}{2}(f(1)-f(n+1)).$

同理，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{k^2+1}{k^4+k^2+1}\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(k^2+k+1)+(k^2-k+1)}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)}\right|$$

$$==\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(f(k)+f(k+1)\right)\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(f(1)+f(n+1)),n=2m-1,m\in N^*\\ \dfrac{1}{2}(f(1)-f(n+1)),n=2m,m\in N^*\end{cases}$$

由于 $\dfrac{1}{2}(f(1)+f(n+1))>\dfrac{1}{2}f(1)=\dfrac{1}{2}>\dfrac{55}{111}$，故而只能有 $n=2m,m\in N^*$.

于是，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{k^2+1}{k^4+k^2+1}\right|\leq\frac{55}{111}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^4+k^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(f(1)-f(n+1))\leq\frac{55}{111}\leq\frac{1}{2}(f(1)-f(n+1)),(n=2m,m\in N^*)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(f(1)-f(n+1))=\frac{55}{111},(n=2m,m\in N^*)$$

$$\Leftrightarrow n^2+n+1=111,(n=2m,m\in N^*)\Leftrightarrow n=10.$$

综上所述，所有符合条件的正整数 n 只有 $n=10$.